Chapitre 1 : Fonctions affines et linéaires

I- Fonctions affines et linéaires

A- Définitions

Une fonction affine est une fonction définie par la relation $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels fixés.

Remarque :

Si b = 0, l'écriture devient $f(x) = ax$, on dit alors que la fonction est linéaire

Si a = 0, l'écriture devient $f(x) = b$, on dit alors que la fonction est constante.

Exemples :

Les fonctions définies par $f(x) = 2x - 6{,}5$ et $g(x) = -1{,}3x + 7$ sont des fonctions affines.

Les fonctions définies par $f(x) = 0,07x$ et $g(x) = -3x$ sont des fonctions linéaires.

B- Représentations graphiques des fonctions linéaires et affines

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

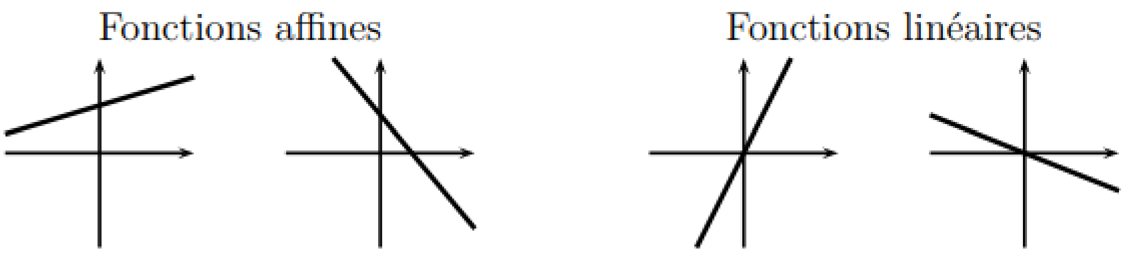
Cette droite a pour équation $y = ax + b$. a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine. (il s'agit de l'image de 0 par la fonction f)

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Il y a alors proportionnalité entre l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses

passant par le point de coordonnées (0 ; b).



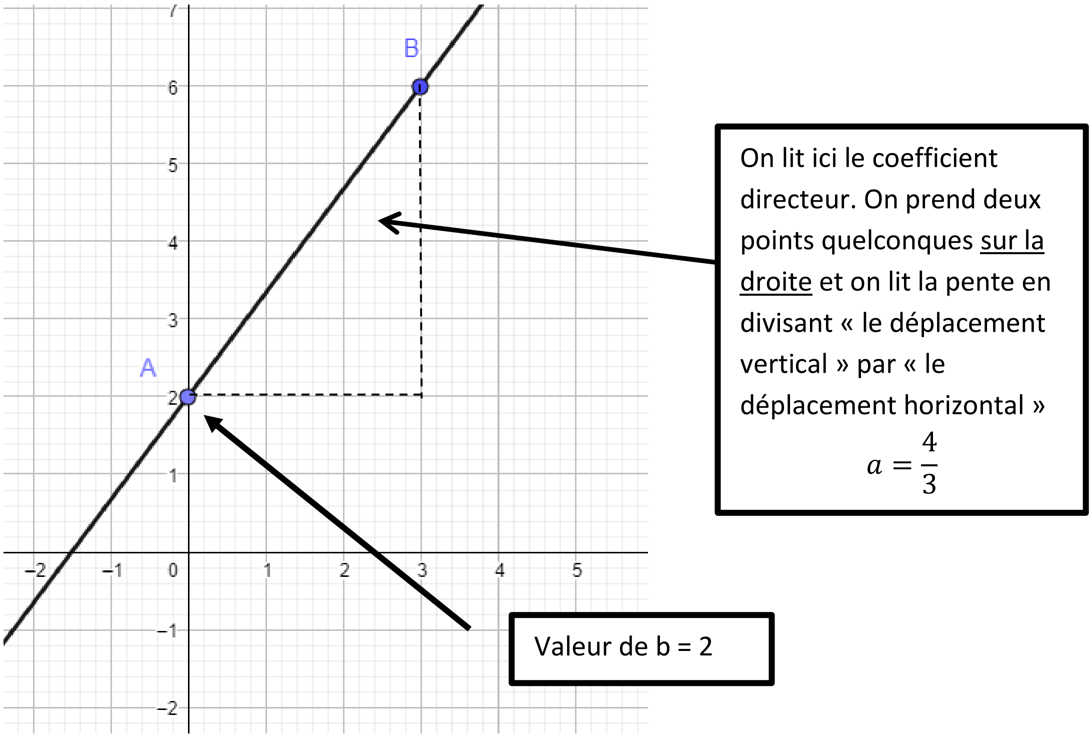
Méthode : Comment déterminer graphiquement l'expression d'une fonction affine ?

L'expression d'une fonction associée à une droite est du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

b est l'ordonnée à l'origine, il s'agit donc de l'image de 0 par f. Pour le lire, on se place à l'intersection de l'axe des ordonnées et de la courbe de f.

a est le coefficient directeur, il correspond à la pente de la droite. Pour le lire, on choisit au hasard 2 points sur la droite et on lit le déplacement de l'un à l'autre. a est donné par le calcul :

$$\frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \frac{\updownarrow}{\leftrightarrow}$$



On obtient ici : $f(x) = \frac{4}{3}x + 2$

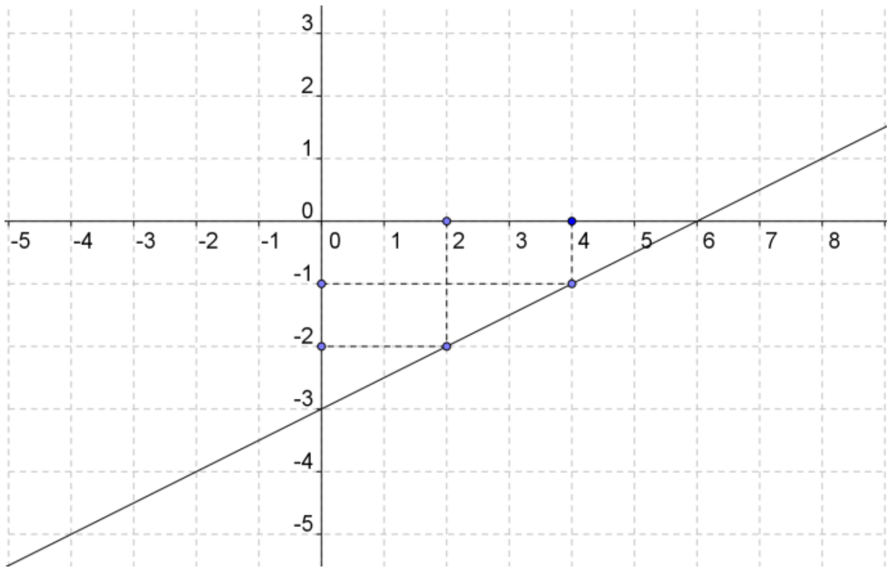
C- Lectures graphiques

Pour lire l'image de 2 :

1- On se place en 2 sur l'axe des abscisses
2- On cherche verticalement la courbe
3- On lit l'ordonnée du point correspondant : -2

Pour lire l'antécédent de -1

1- On se place en -1 sur l'axe des ordonnées
2- On cherche horizontalement la courbe
3- On lit l'abscisse du point correspondant : 4



D- Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine par le calcul

Propriété :

Soit f la fonction affine telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

Le coefficient directeur a de cette fonction est donné par l'expression :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{y_2 - y_1}$$

Exemple :

Déterminer la fonction affine telle que $f(-1) = -4$ et $f(3) = 8$

f est une fonction affine, f s'écrit donc $f(x) = ax + b$.

On a de plus :

$$a = \frac{-4-8}{-1-3} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Ainsi, $f(x) = 3x + b$.

Reste à déterminer b.

Pour cela, on utilise une des égalités au choix

$$f(-1) = -4$$
$$3 \times (-1) + b = -4$$
$$-3 + b = -4$$
$$b = -4 + 3 = -1$$

Conclusion :

$$f(x) = 3x - 1$$

II- Sens de variations

Propriété :

Pour une fonction affine f,

– lorsque son coefficient directeur est positif, f est croissante ;

– lorsque son coefficient directeur est négatif, f est décroissante ;

– lorsque son coefficient directeur est nul, f est constante.

Exemple :

$f(x) = 3x + 2$ est croissante.

$g(x) = -2x + 5$ est décroissante.

III- Equations du premier degré

A- Définition

Une équation du premier degré est une expression algébrique de la forme $A(x) = B(x)$ où A et B sont des fonctions affines.

Exemple :

$4x + 2 = -5x + 1$ est une équation du premier degré

$4x^2 - 3x + 1 = 2x + 1$ n'est pas une équation du premier degré.

Résoudre une équation revient à trouver toutes les valeurs de x de sorte que l'égalité soit vraie.

B- Résoudre une équation algébriquement

Propriété :
Deux équations sont équivalentes et on utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple :

$$2x + 1 = 3 + x$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 - x = 3 + x - x$$
$$\Leftrightarrow 1x + 1 = 3$$
$$\Leftrightarrow 1x + 1 - 1 = 3 - 1$$
$$\Leftrightarrow 1x = 2$$

L'ensemble des solutions de cette équations est $S = \{2\}$

C- Résoudre une équation graphiquement

Propriété :
Toute équation du premier degré peut se ramener à une équation du type $f(x) = k$ où f est une fonction affine et k un nombre réel.

Propriété :
Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ revient à trouver les abscisses éventuelles des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite horizontale dont les ordonnées valent k.