Chapitre 3 : Fonctions affines et inéquations

I- Inégalités et inéquations.

A- Vocabulaire

On considère a et b deux nombres réels.
On dit que a est strictement inférieur à b et on note $a < b$ si $b - a > 0$
On dit que a est inférieur ou égal à b et on note $a \leq b$ si $b - a \geq 0$

Exemple :

$$1 < 3 \; car \; 3 - 1 > 0$$

$x > 0$ se lit x est strictement positif
$x < 0$ se lit x est strictement négatif

B- Propriétés des inégalités

Propriété 1 :
On considère trois nombres réels a, b et c et un nombre réel d non nul.

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

De même,

$$a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$$

Si $d < 0$,

$$a < b \; \Leftrightarrow a \times d > b \times d$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$$

Si $d > 0$,

$$a < b \Leftrightarrow a \times d < b \times d$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$$

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre négatif, on **DOIT** retourner l'inégalité.

Remarque :
On a les mêmes équivalences si les inégalités sont larges et non strictes. ($\leq$ ou $\geq$ au lieu de > ou <)

Application 1 :
On considère un nombre x tel que $x < 8$
Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

$x - 3$	$x + 4$	$2x$	$-3x$	$\frac{x}{2}$

Propriété 2:
Si a, b, c et d sont des nombres réels tels que $a < c$ et $b < d$ alors $a + b < c + d$

Application 2 :

On considère deux nombres $x\ et\ y$ tesl que $x < 3\ et\ y < 7$

Qu'en est-il de $x + y$?

C- Inéquations

Une inéquation d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres. Résoudre une inéquation d'inconnue x c'est trouver l'ensemble de ces solutions, c'est-à-dire trouver l'ensemble des nombres pour lesquels l'inégalité est vraie.

Application :

On considère l'inéquation $-6x + 9 > 2$. Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ?

On considère l'inéquation $2x + 7 < 6x - 5$. Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il solution de cette inéquation ?

D- Résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation, on applique les propriétés énoncées au B- jusqu'à déterminer l'ensemble des valeurs de x qui vérifie l'inéquation.

Applications :

Résoudre les inéquations :

$$3x + 2 > 7$$

$$-x + 9 \geq -2$$

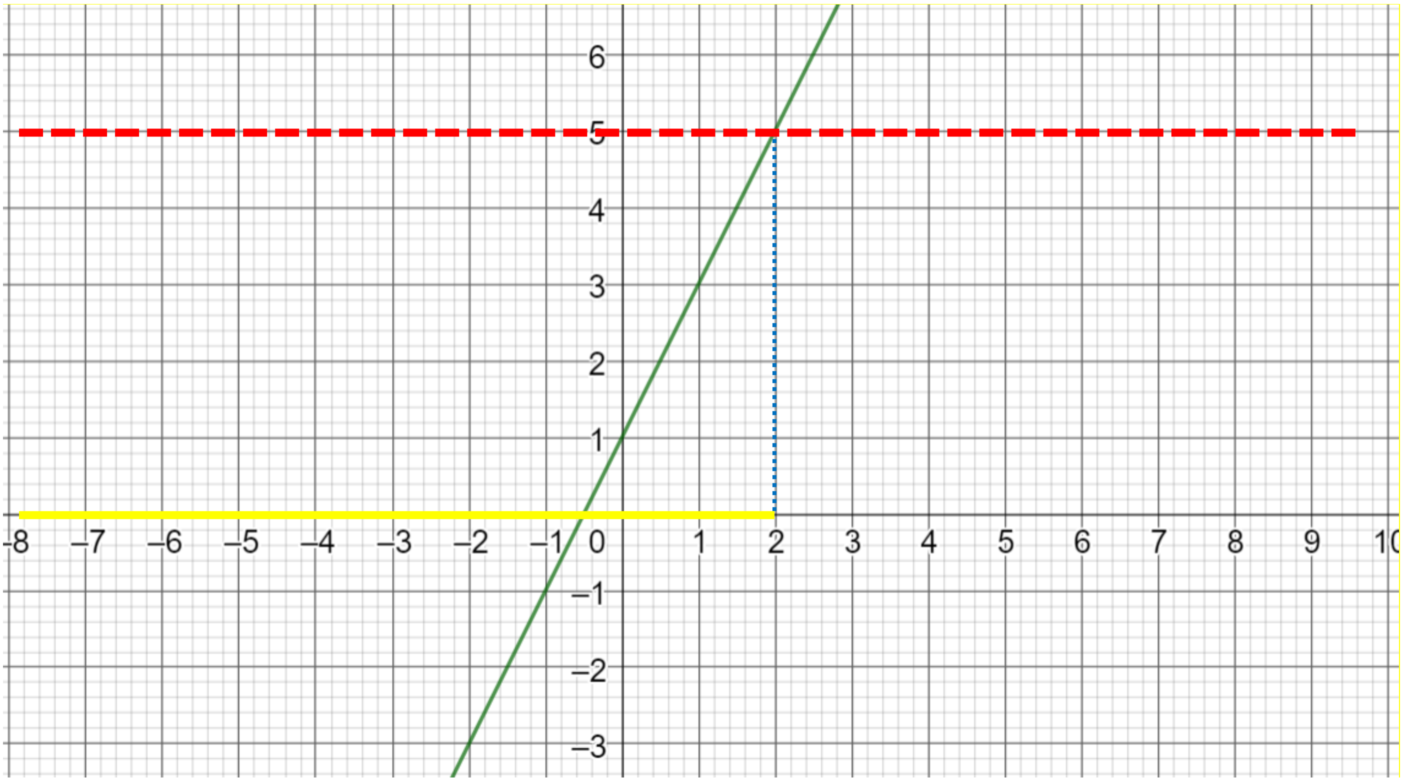
$$\frac{3x}{2} \leq 9$$

II- Résolution graphique d'une inéquation

Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \leq k$ où k est un nombre réel, revient à déterminer les abscisses des points de la courbe de f ayant une ordonnée inférieure ou égale à k.

Méthode : Résoudre $2x + 1 \leq 5$

1) On représente graphiquement la courbe de f.



2) On repère tous les points dont l'ordonnée est inférieure à 5.

Il s'agit de tous les points dont l'abscisse est inférieure ou égale à 2.

Application :

Résoudre l'inéquation $0{,}5x + 4 > 6$

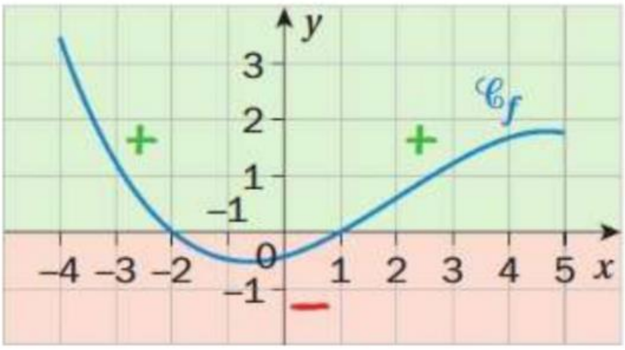
III- Signe d’une fonction affine

A- Signe d’une fonction

Définition :
Etudier le signe d’une fonction f revient à étudier la position de la courbe représentative Cf par rapport à l’axe des abscisses.
- Si Cf coupe l’axe des abscisses, alors f s’annule aux abscisses correspondantes.
- Si Cf est strictement au-dessus de l’axe des abscisses, alors f est strictement positive sur l’intervalle correspondant.
- Si Cf est strictement en dessous de l’axe des abscisses, alors f est strictement négative sur l’intervalle correspondant.

Remarque : On peut résumer le signe d’une fonction dans un tableau appelé le tableau de signe.

Application : Donner le signe de la fonction dont la courbe est la suivante :



B- Signe d’une fonction affine

On considère la fonction la fonction affine $f : x \to ax + b$, avec a non nul.

Propriété :
Le signe de cette fonction dépend du signe de a. Nous avons deux cas possibles :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		-	0	+	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	-	

Méthode : Pour déterminer le signe d’une fonction affine :
1- On résout $ax + b > 0$
2- On complète le tableau.

Application :

Donner le tableau de signe des fonctions suivantes :

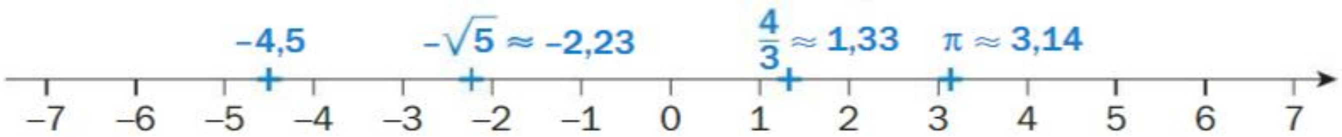
$f(x) = 4x + 8$	$g(x) = -5x + 15$

IV- Comment noter l'ensemble des solutions ?

A- Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Définition :

La droite numérique est une droite repérée par une origine O est par une échelle OI. À chaque point de la droite numérique correspond un et un seul nombre réel qui est l'abscisse de ce point dans le repère considéré. L'ensemble de toutes ces abscisses forment l'ensemble des nombres réels. On note cet ensemble $\mathbb{R}$



B- Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$

L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$

L'intervalle $[a;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à a.

L'intervalle $]-\infty\ ; a]$ est l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à a.

Pour exclure une borne de l'intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur. Par exemple, $]a\ ; b]$ signifie tous les nombres x tels $a < x \leq b$

Application :

Vrai ou faux :

$5 \in]-\infty ; 4]$		$3{,}72 \in [3{,}719 ; 3{,}721]$	
$-2{,}5 \in [-2 ; 5]$		$\sqrt{2} \in]1{,}41 ; 1{,}42$	

Application 2 :

Représenter les intervalles suivants :

$]-3 ; 4]$	
$]-\infty ; 2[$	
$[-\frac{1}{2} ; +\infty[$	

C- L'ensemble des solutions d'une inéquation

L'ensemble des solutions d'une inéquation se note sous la forme d'un intervalle.

Application :

Résoudre l'inéquation : $4x - 3 \geq 2x + 5$