Chapitre 2 : Vecteurs

I- Notion de vecteurs

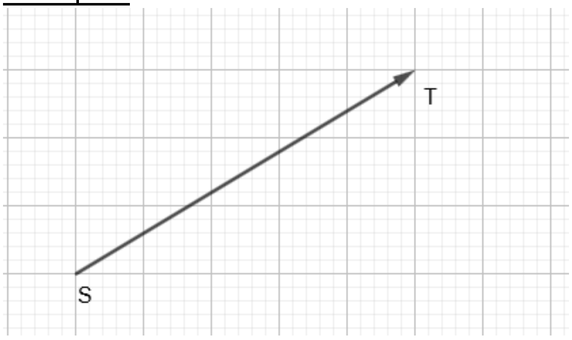
A. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$:

A et B sont deux points du plan. La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M, l'unique point M' tel que [BM] et [AM'] aient le même milieu.
Cela signifie que ABM'M est un parallélogramme, éventuellement aplati.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
On appelle A son origine et B son extrémité.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède trois caractéristiques :
- Sa direction (parallèlement à (AB))
- Son sens (de A vers B)
- Sa norme (la longueur AB)

Exemple :



L'origine du vecteur est :

L'extrémité du vecteur est :

Le vecteur $\overrightarrow{ST}$ a pour direction :

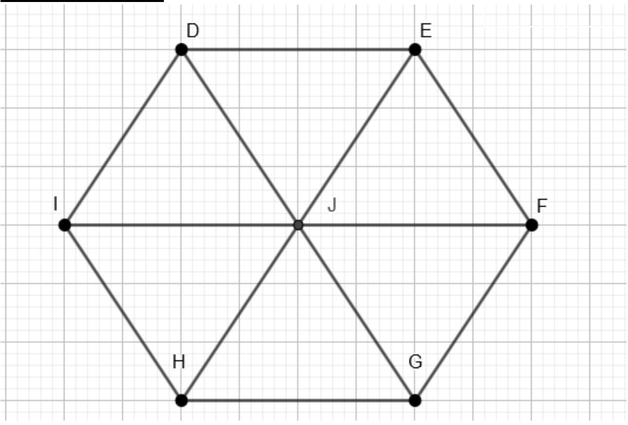
Il a pour sens :

Il a pour norme :

B. Vecteurs égaux :

Définition :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
On note : $\vec{u} = \vec{v}$.

Application : Déterminer les vecteurs égaux.



Propriété :
ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati, si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

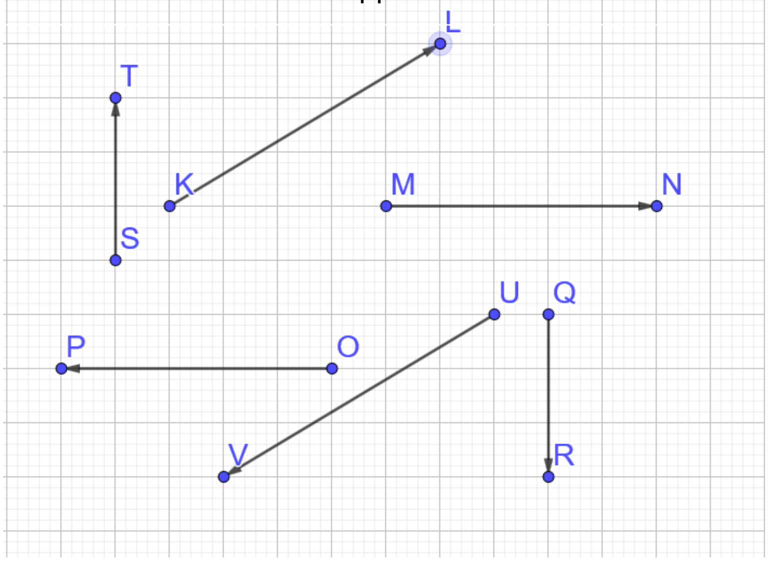
C. Vecteurs particuliers :

Définition :
Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$ est associé à la translation qui transforme A en A et tout point M en lui-même.

Remarque :
On a donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Définition :
Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a la même direction et la même norme que $\overrightarrow{AB}$ mais qui le sens opposé.
On le note $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Application :
Déterminer les vecteurs opposés.

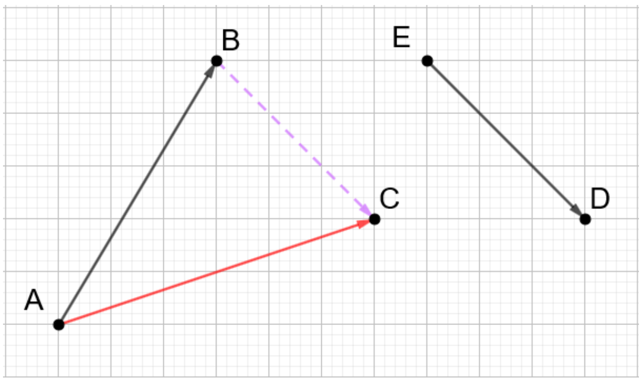


II Construction de la somme de vecteurs

Méthode 1 : relation de Chasles

On met les représentants des vecteurs bout à bout :

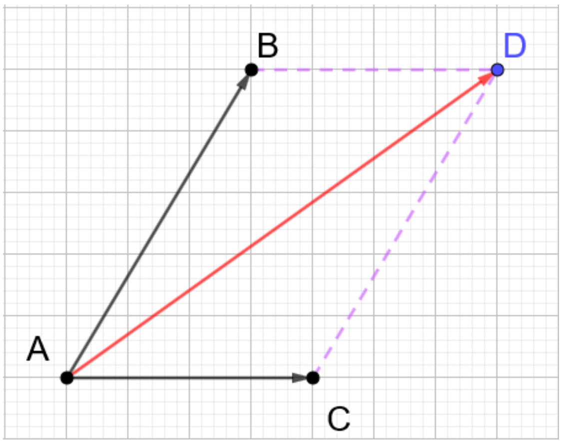
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



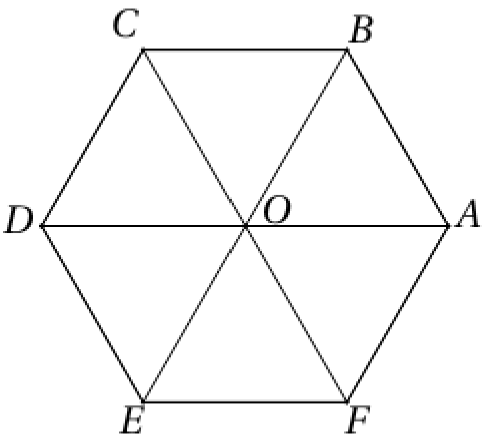
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Méthode 2 : Règle du parallélogramme

Si les représentants des vecteurs ont même origine,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ avec ABCD parallélogramme



Application :
ABCDEF est un hexagone régulier de centre O



Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \dots$
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \dots$
$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \dots$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \dots$
$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} = \dots$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF} = \dots$

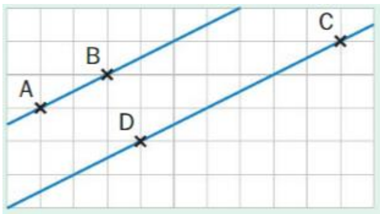
III- Colinéarité de deux vecteurs

A. Définition

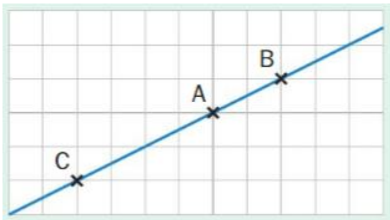
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.
Dans ce cas, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

B. Conséquences

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires



Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

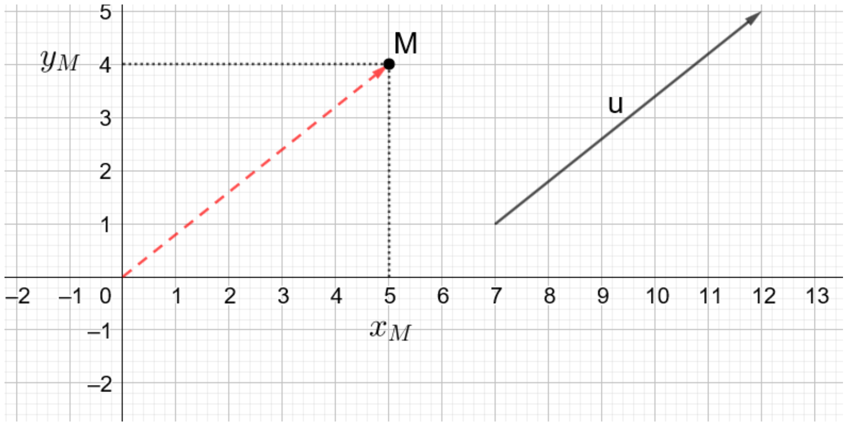


C. Définitions

Deux vecteurs non colinéaires forment une base de vecteurs du plan.
Si les directions de ces deux vecteurs sont perpendiculaires, on dit que la base est orthogonale.
Si de plus, les normes de ces deux vecteurs sont identiques, on dit que la base est orthonormale.

IV - Coordonnées de vecteurs

A. Définition

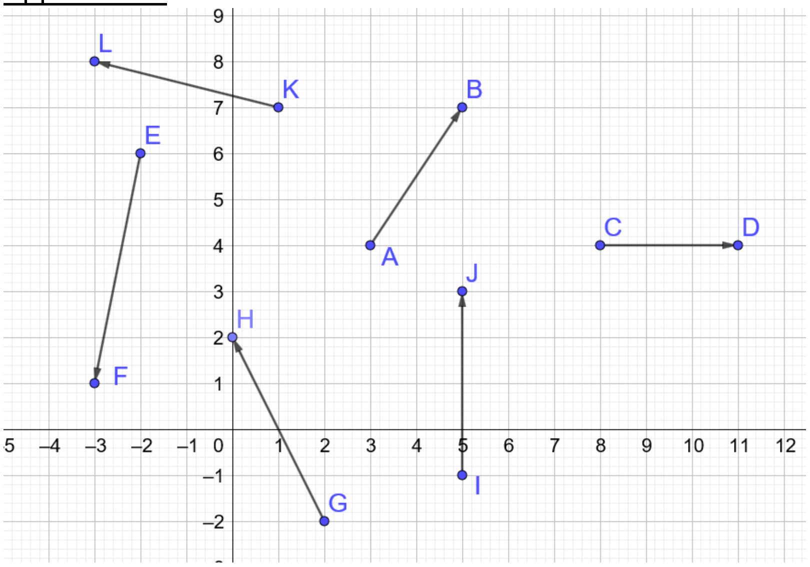


Définition :

Dans un repère (O, I, J) les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées d'un point M (x, y) tel que $\overrightarrow{OM}$ soit un représentant de $\vec{u}$

On a $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Application :



Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

Propriétés :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

C'est-à-dire : $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y')$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$

Propriétés :

Dans un repère, si $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Application :

Si $A(1\,;-2) et\ B(3\,;-4)$

Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

B. Opérations sur les vecteurs

On se place dans une base orthonormée

Propriété :

Dans un repère du plan, si : $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y')$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Application :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

Propriété :

Dans un repère du plan, si : $\vec{u}\ (x\ ;y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;y')$, alors $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

Application :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ - $\vec{v}$ a pour coordonnées :

Propriété :

Dans un repère du plan, soit $\vec{u}\ (x\ ;y)$ un vecteur et k un nombre réel. Le vecteur $k\times\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k\times x \\ k\times y \end{pmatrix}$

Application :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan

Le vecteur $3\vec{u}$ a pour coordonnées :

Le vecteur $4\vec{u}-5\vec{v}$ a pour coordonnées :

C. Norme d'un vecteur

On se place dans une base orthonormée

On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Application :

La norme du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est :

Remarque :

La formule de la norme permet de calculer la distance entre deux points A et B dont on connait les coordonnées dans un repère orthonormé.

En effet, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$, la distance AB vaut :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Application :

On donne A(2 ; 1) et B (3 ; 4) dans un repère orthonormé. Calculer la longueur AB.