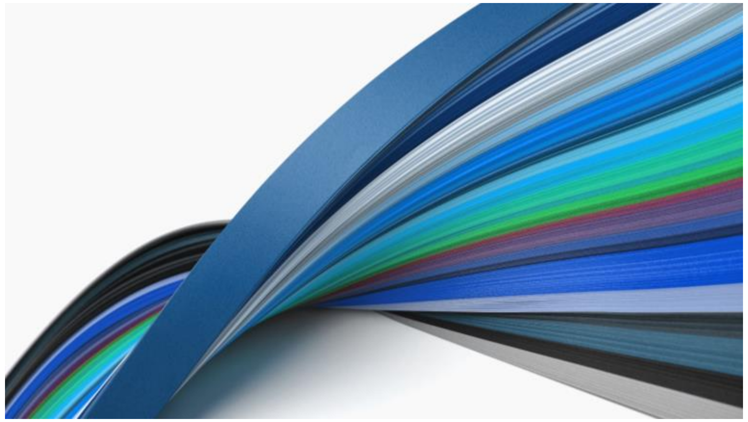
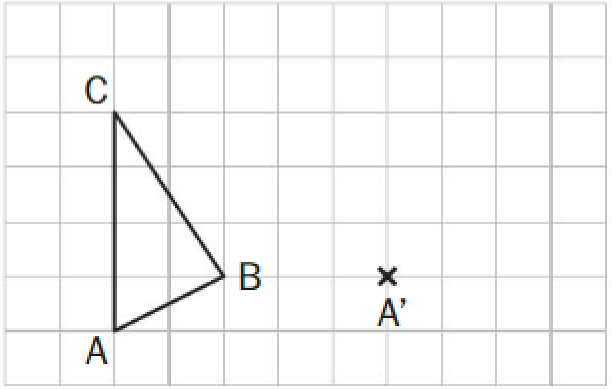
Chapitre 2
Les vecteurs

Exercices



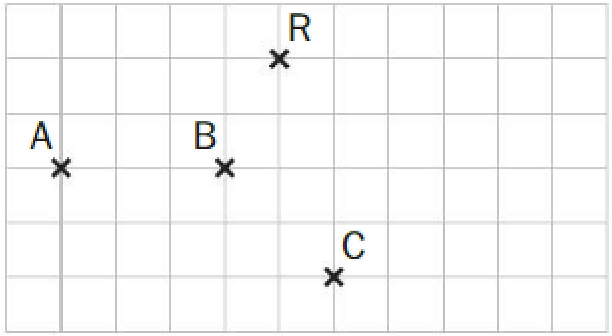
Rappels de collège

1 **a.** Reproduire la figure ci-dessous et tracer l'image A'B'C' du triangle ABC par la translation qui transforme A en A'.



b. Quelle est la nature du quadrilatère BB'C'C ? Justifier.

2 **a.** Reproduire la figure et placer l'image S du point R par la translation qui transforme A en B.



b. Placer l'image T du point S par la translation qui transforme B en C.

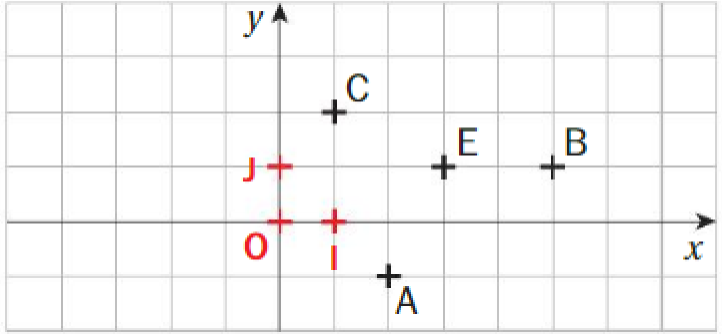
c. Quelle est la nature du quadrilatère ARTC ? Justifier.

6 On considère le repère (O, I, J) ci-contre.

a. Lire les coordonnées de tous les points indiqués.

b. Reproduire la figure et placer le point D de coordonnées (–2 ; 0), puis conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.

c. Placer le point F tel que ABFE soit un parallélogramme, puis lire ses coordonnées.

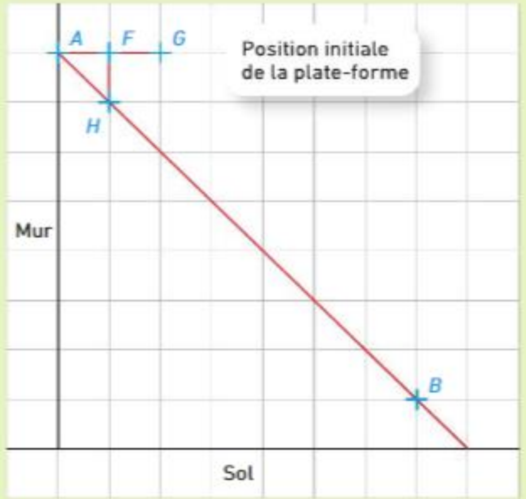


Situation A Comprendre un dispositif mécanique

en SCIENCES de L'INGÉNIEUR

Lors de déménagements d'appartements situés en étage, les déménageurs utilisent souvent un appareil appelé « monte-meubles » formé d'une barre sur laquelle coulisse une plate-forme. Ce dispositif permet de monter ou descendre des meubles placés sur la plate-forme.

On suppose qu'on se trouve dans la phase qui consiste à descendre les meubles de l'appartement. On peut modéliser cette situation comme sur la figure ci-dessous.



1. À l'issue de cette phase, le point de la plate-forme situé initialement en A se trouve en B.
Reproduire la figure et représenter la plate-forme du monte-meubles à l'issue de cette phase.
On note respectivement F', G' et H' les positions finales des points situés initialement en F, G et H.

2. Que peut-on remarquer concernant les segments $[AB]$, $[FF']$, $[GG']$ et $[HH']$?

3. Dans la situation des questions précédentes, on dit que la plateforme a subi une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On dit que F' est l'image de F **par la translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que les vecteurs $\overrightarrow{FF'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux. On note $\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{AB}$.
Quelle est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$? Quelle est celle de H ?

4. Citer deux autres vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABF'F$? Justifier brièvement.

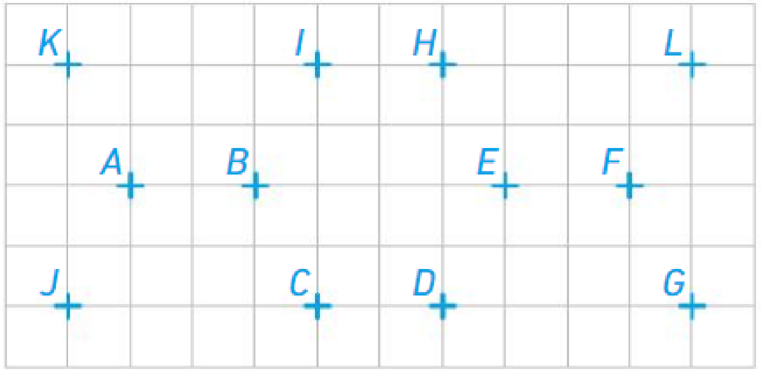
6. Quelle autre égalité de vecteurs peut-on alors écrire grâce à la figure précédente ?

Bilan de l'activité:

La translation qui transforme A en B est aussi appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
Dire que F est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ c'est dire que ABFE est un parallélogramme.
Cela revient aussi à construire un vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 1

Sur la figure ci-dessous, on donne des points placés sur un quadrillage formé de carrés.



1. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

a. $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AJ}$.

b. L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ est C.

c. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{KA}$.

d. L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{FL}$ est I.

e. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FL}$.

f. $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{HL}$.

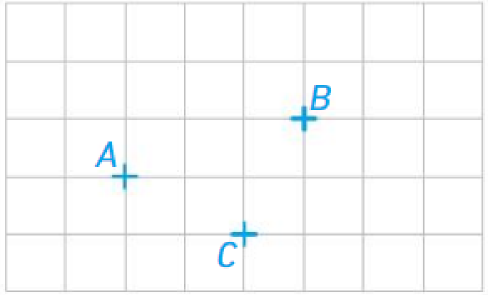
2. Nommer tous les vecteurs (formés avec les points de la figure) qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Nommer tous les vecteurs (formés avec les points de la figure) qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{GD}$.

4. Nommer tous les vecteurs (formés avec les points de la figure) qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{DE}$.

Exercice 2

On donne la figure ci-dessous sur un quadrillage formé de carrés.



1. Reproduire cette figure.

2. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

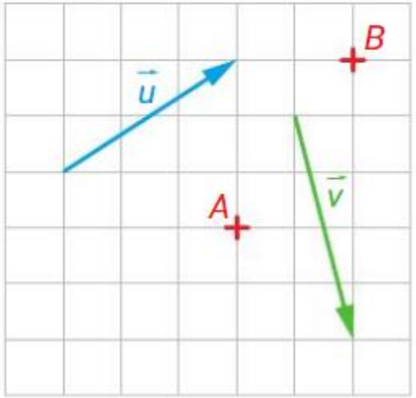
3. Placer le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CA}$.

4. Placer le point E tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$.

5. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FB}$.

Exercice 3

On donne la figure ci-dessous sur un quadrillage formé de carrés.



Recopier cette figure et tracer :

1. le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A ;
2. le représentant du vecteur $\vec{v}$ d'origine B ;
3. le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'extrémité B ;

Exercices p 108

37 **a.** Tracer un triangle ABC.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en M, et la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ transforme A en N. Placer les points M et N.

b. Quelle est la nature du quadrilatère AMBN ? Justifier à l'aide d'égalités vectorielles.

Aide Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

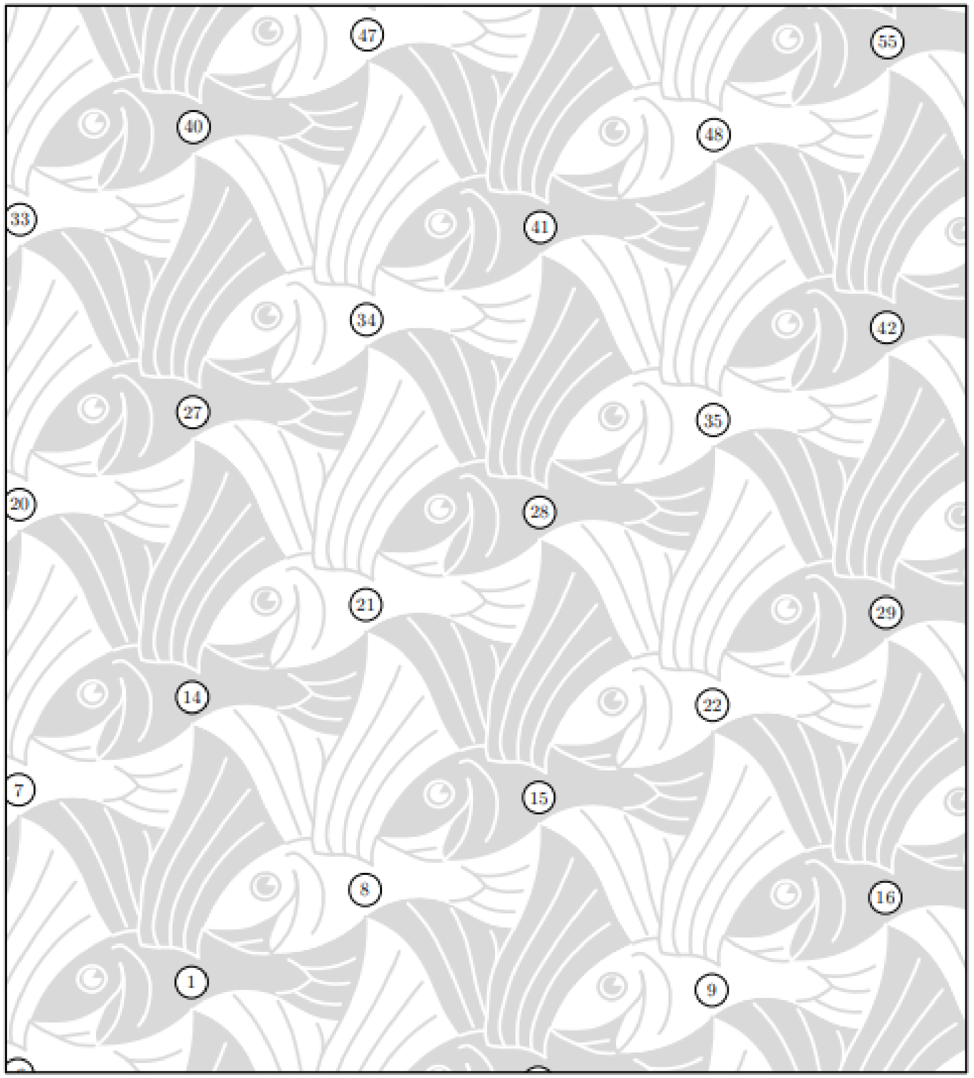
38 **a.** Tracer un triangle ABC isocèle en C, puis placer les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABEF ? Justifier.

Aide Comparer les segments [AE] et [BF].

Activité : Construction de la somme de deux vecteurs

La figure ci-dessous représente un pavage : c'est un motif qui recouvre entièrement une surface. Ici, le pavage est constitué d'un unique motif : un poisson.



1) Représenter sur la figure le vecteur $\vec{u}$ de la translation qui transforme le poisson 21 en 22.

2) De même pour celle de vecteur $\vec{v}$ transformant le poisson 22 en 42.

3) On enchaîne maintenant les deux translations successivement. Que devient le poisson 21 à la fin de ces deux translations ?

Tracer en rouge le vecteur qui caractérise cette transformation globale.

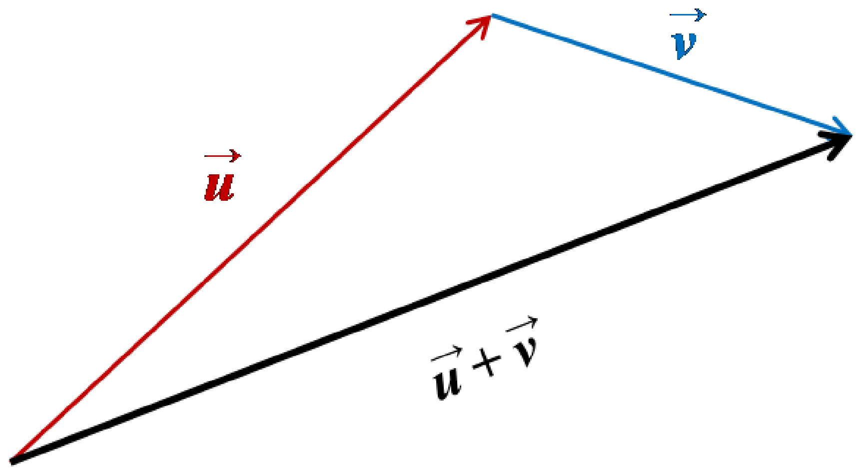
On notera $\vec{u} + \vec{v}$ ce vecteur.

4) Déduire une méthode permettant de construire la somme de deux vecteurs.

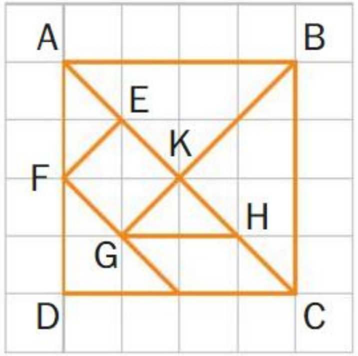
Bilan de l'activité : Méthode pour construire la somme de deux vecteurs

Si on enchaîne deux translation, une de vecteur $\vec{u}$ et une autre de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur de cette nouvelle translation est appelé le vecteur somme et on le note $\vec{u} + \vec{v}$

Pour construire la somme de deux vecteurs, on construit des représentants des deux vecteurs de sorte qu'ils soient « bout à bout ». Le vecteur somme sera le vecteur d'origine, l'origine du 1er et d'extrémité, l'extrémité du 2^{e}.



40 On considère le tangram suivant.



Dans chacune des égalités suivantes, remplacer « ▲ » par le point qui convient.

a. $\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{E▲} = \overrightarrow{AF}$

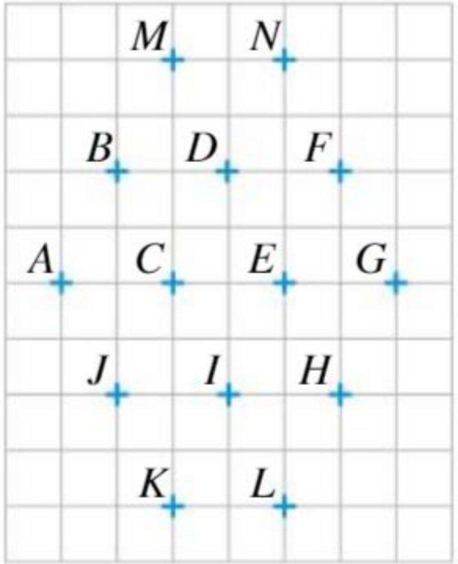
b. $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{▲K}$

c. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{H▲}$

d. $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{▲G}$

Exercice 4

On donne la figure ci-dessous sur un quadrillage formé de carrés.



1. Citer un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.
2. Citer deux représentants du vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KE}$.
3. Citer deux représentants du vecteur $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{IB}$.
4. Citer un représentant du vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{NC}$.
5. Citer deux représentants du vecteur $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{DE}$.

Exercice 5:

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 4$ cm.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

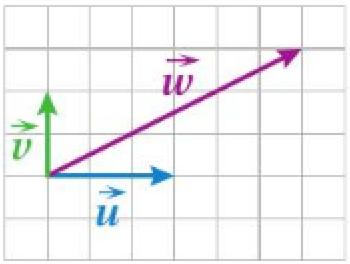
Exercice 6:

1. Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 5$ cm et $BC = 4$ cm.
2. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.

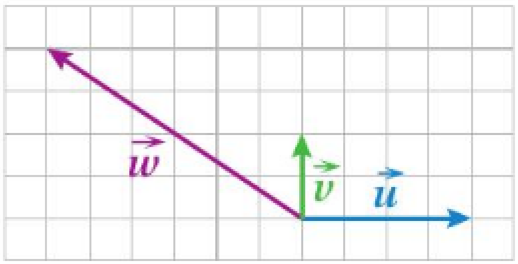
Exercices page 109

49 Dans chaque cas, exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

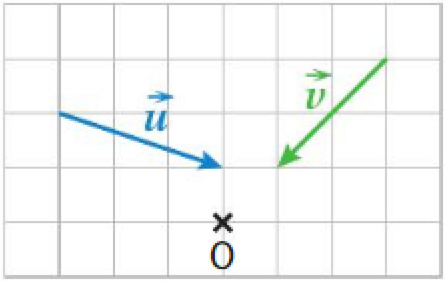
a.



b.



50 Sur une feuille quadrillée, reproduire la figure ci-contre, puis construire les points A, B et C tels que :



$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + 1{,}5\vec{v}$; $\overrightarrow{OB} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = -3\vec{u} - 0{,}5\vec{v}$.

52 PAB est un triangle scalène et M est le milieu du segment [AB].

- Démontrer que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$.

Info

Un triangle **scalène** est un triangle dont les trois côtés sont de longueurs différentes.

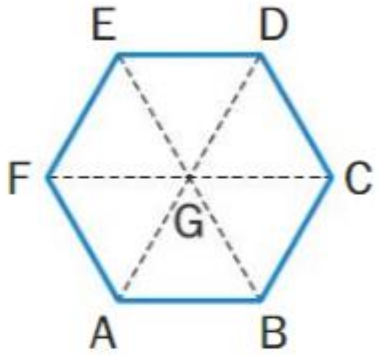
54 ABCDEF est un hexagone régulier de centre G.

- Où se situe le point H défini par $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF}$?

Différenciation

Version guidée

Manuel numérique enseignant



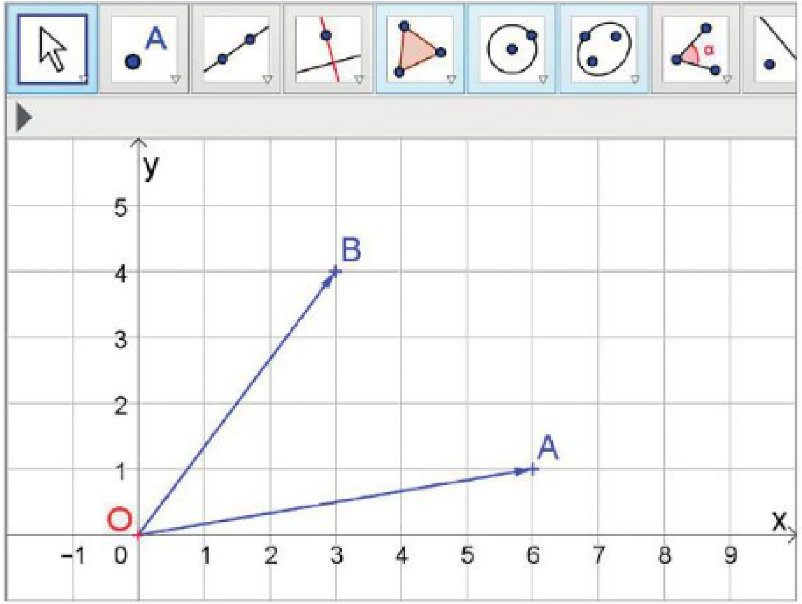
OBJECTIF 4
Utiliser les coordonnées de vecteurs

4 Un repère pour calculer TICE

1. a. Dans un logiciel de géométrie dynamique :

- placer le point O de coordonnées (0 ; 0) ;
- placer le point A de coordonnées (6 ; 1) ;
- créer le vecteur $\overrightarrow{OA}$, puis lire ses coordonnées dans le logiciel ;
- placer le point B de coordonnées (3 ; 4), puis créer le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b. Comparer les coordonnées des points A et B avec les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



2. a. Créer le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ en le plaçant de sorte que son origine soit le point O. Placer le point C à l'extrémité de ce vecteur.

b. Proposer un calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ à partir des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

3. a. Créer le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b. Que constate-t-on au sujet des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}$?

Proposer une explication.

c. Conjecturer un calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ à partir des coordonnées des points A et C.

Bilan de l'activité : Coordonnées de vecteurs

On considère $\vec{u}$ un vecteur d'un repère orthonormé.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M défini par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

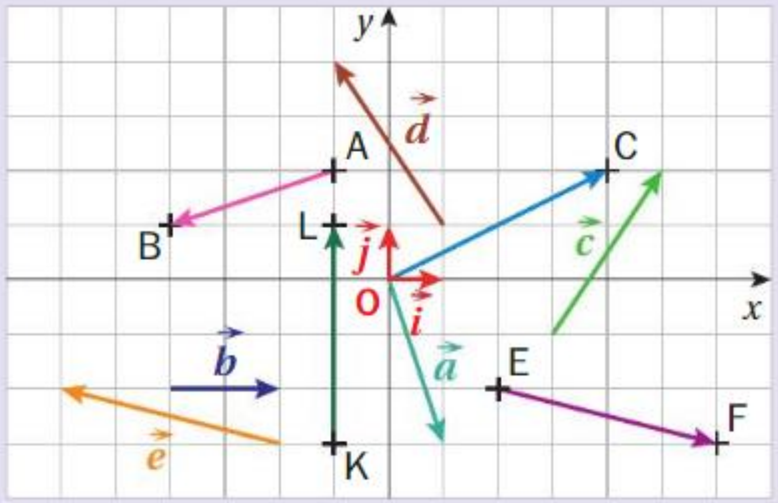
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées

Les coordonnées de la somme de deux vecteurs sont données par la somme des coordonnées.

Si A et B sont deux points du plan de coordonnées
$A(x_A\,;y_A)$ et $B\ (x_B\,;y_B)$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :
$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exercices page 111

67 Lire les coordonnées des vecteurs dessinés ci-dessous.



Exercice 7:

Dans un repère, on considère les points $A(-2\,;7)$, $B(3\,;-1)$ et $C(0\,;5)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

Exercice 8:

Dans un repère, on considère les points $A(-2\,;0)$, $B(3\,;-1)$, $C(5\,;4)$ et $D(0\,;5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9:

Dans un repère, on considère les points $R(4\,;-2)$, $S(1\,;2)$, $T(2\,;-5)$ et $U(5\,;-9)$.

Démontrer que $RSTU$ est un parallélogramme.

Exercices page 111

72 On donne les points A(3 ; −2) et B(−2 ; 1), et les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

- Déterminer les coordonnées des points A’ et B’ tels que $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$.

73 On donne A(−2 ; −3), B(2 ; −1) et C(1 ; 3).

- Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 10:

Dans une base orthonormée, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$ puis celles du vecteur $\vec{t} = -3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Exercice 11:

Dans une base orthonormée, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$.

- Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

Dans une base orthonormée, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

- Calculer $||\vec{u}||$.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = 0{,}4\vec{j} - 0{,}3\vec{i}$.

- Calculer $||\vec{u}||$.

Exercice 12:

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\,;2)$, $B(-3\,;6)$ et $C(-7\,;-1)$.

- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 13:

Raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne les points $I(1\,;-5)$, $J(7\,;2)$, $K(16\,;4)$ et $L(10\,;-3)$.

- Montrer que $IJKL$ est un losange.

Raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(10\,;-1)$, $B(12\,;2)$, $C(18\,;-2)$ et $D(16\,;-5)$.

- Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

Raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne les points $N(4\,;-6)$, $O(7\,;-4)$, $P(9\,;-7)$ et $Q(6\,;-9)$.

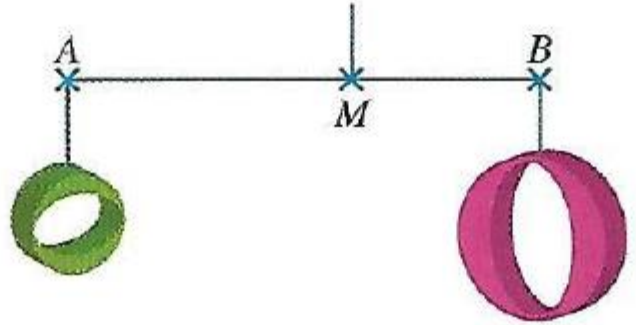
- Montrer que $NOPQ$ est un carré.

Exercice 14

Mobile en équilibre

Représenter

On construit un mobile en suspendant deux masses $m_A = 20$ g et $m_B = 30$ g aux extrémités d'une tige $[AB]$.



Le mobile est suspendu par une ficelle fixée en M. La masse de la tige est négligeable.
Les lois de la physique indiquent que le mobile est en équilibre lorsque $20\overrightarrow{MA} + 30\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
On cherche à déterminer la position du point M sur la tige $[AB]$.

1. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, démontrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$.
2. Comment interpréter cette relation dans le contexte de l'exercice ?

Exercice 15

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(6\,;-4)$, $B(9\,;2)$ et $C(3\,;5)$.
1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Quelle est finalement la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 16

Raisonner, représenter

Sur la figure suivante, A, B et C sont trois points du plan.
Élodie a placé les points suivants sur la figure.
Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Le point N tel que $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Le point P tel que $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BC}$.
Le point R tel que $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{BC}$.

- Elle se rend compte qu'elle a un point en trop sur sa figure. Lequel est-ce ?